Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 2:
Von der Startverteilung
mit den Übergangswahrscheinlichkeiten
zur gemeinsame Verteilung

(Buch S. 87-89, 91-92)

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2.

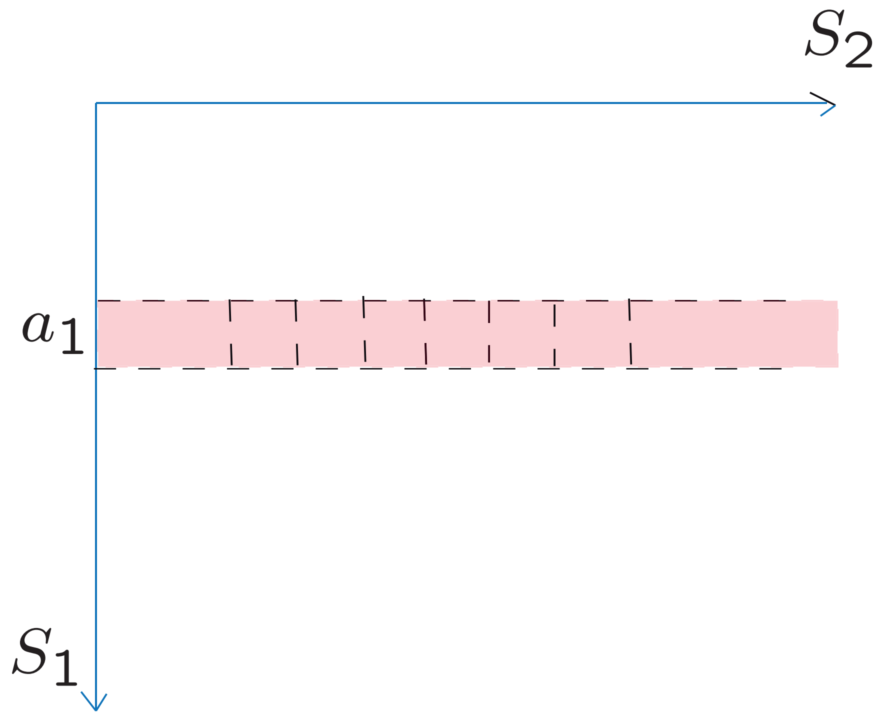
Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) =: \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

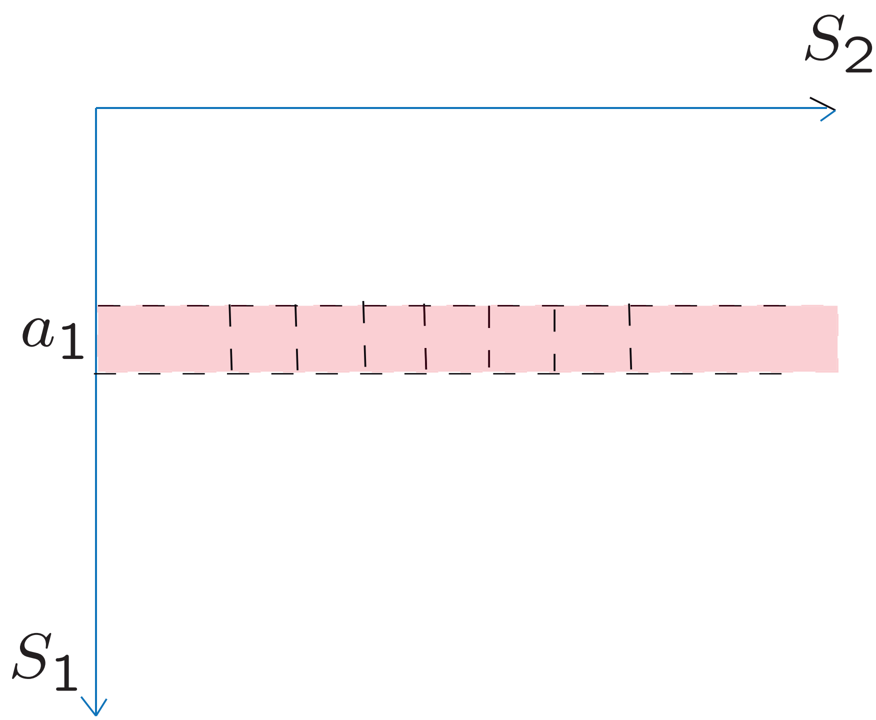


Jetzt bringen wir den Zufall auch in der erste Stufe ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1-wertige Zufallsvariable mit Verteilung ρ_1.

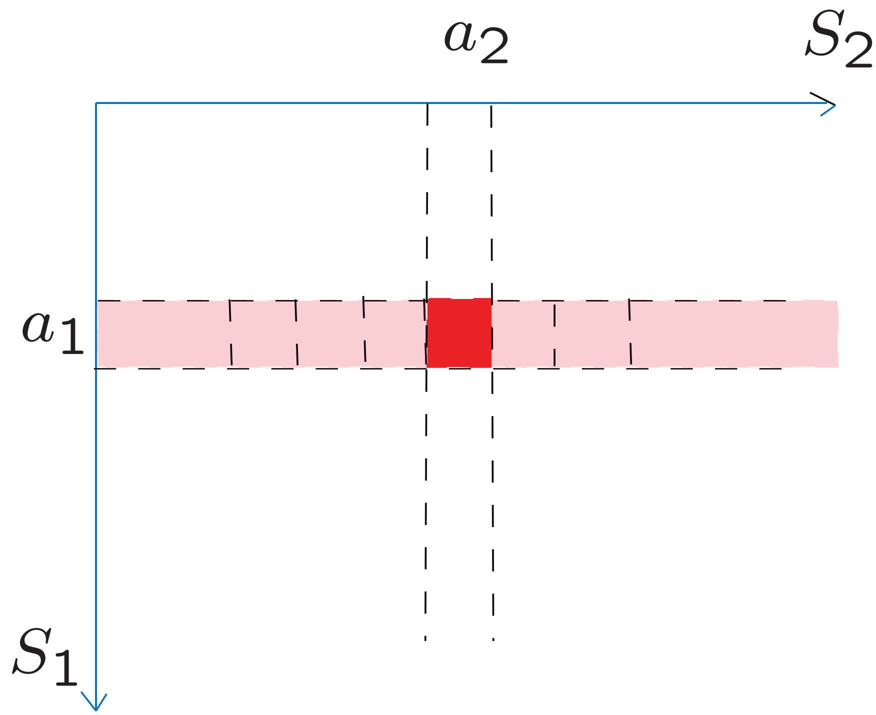
Mit Wahrscheinlichkeit $\rho_1(a_1)$ fällt X_1 auf a_1

.... damit landet man in der Zeile namens a_1.



Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

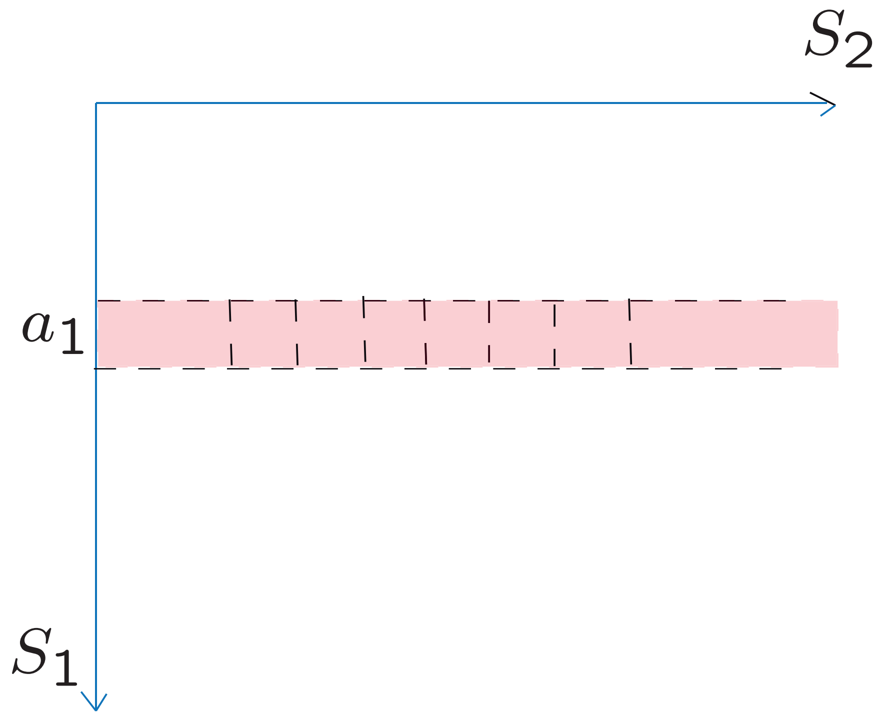
Das heißt im hier betrachteten diskreten Fall:
$P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, sind Verteilungsgewichte auf S_2,
also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.



Vorstellung:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

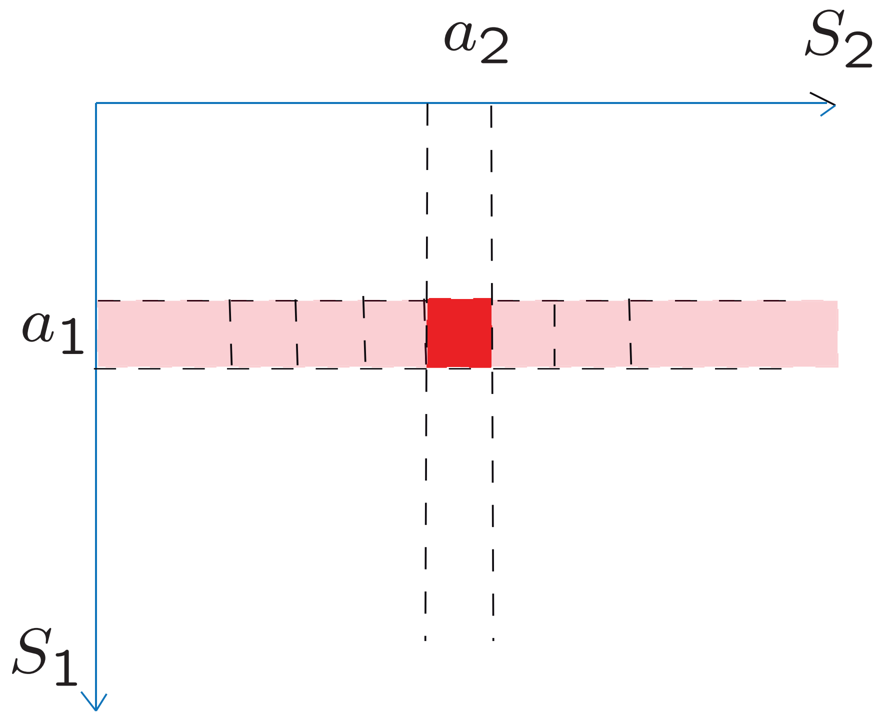
hat das Ereignis $\{X_2 = a_2\}$ die W'keit $P(a_1, a_2)$.



Anders gesagt:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.



Das Gewicht $\rho_1(a_1)$ aus Stufe 1

wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, .)$

auf die Zeile a_1 aufgeteilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho_1(a_1)\, P(a_1, a_2).$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ_1)

und den Verteilungen $P(a_1, \, .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2

mit den Gewichten

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) \, P(a_1, a_2)$$

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

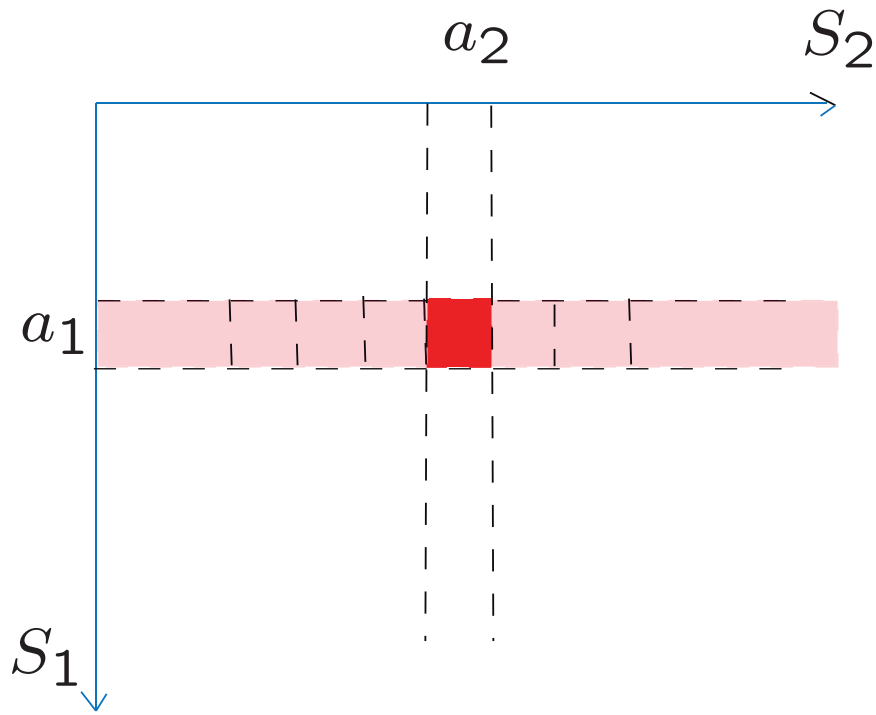
kann man auch schreiben als

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Das ist die einfachste Variante der sogenannten

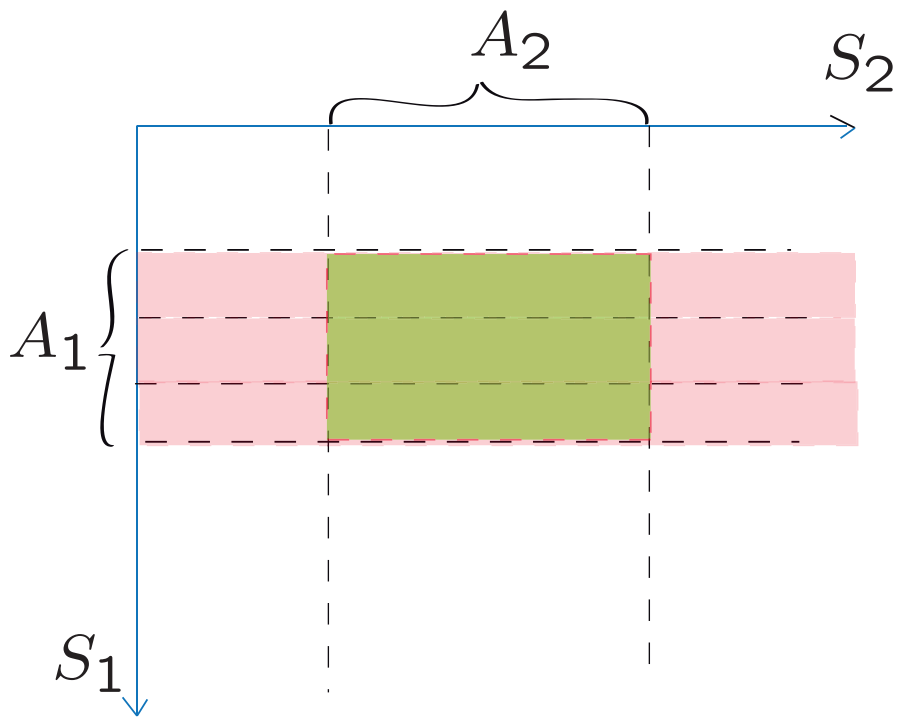
Multiplikationsregel.

Später werden wir das Analogon für n
statt 2 Zufallsvariable kennenlernen.



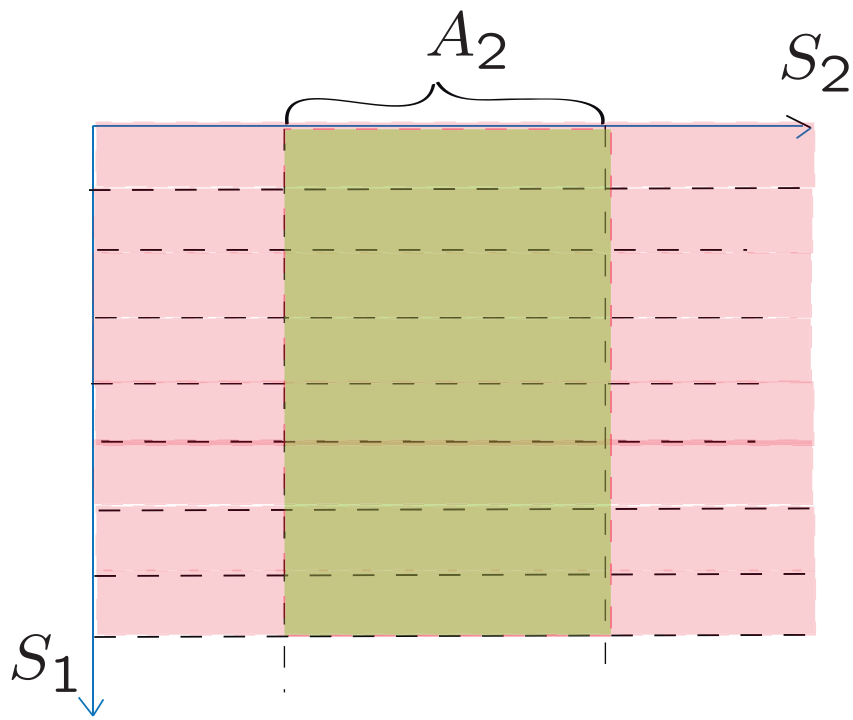
$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Summiert über $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ erhält man daraus:



$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Speziell mit $A_1 := S_1$ ergibt sich:



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

"Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit"

"Zerlegung nach dem ersten Schritt"

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \,.$$

Wir bemerken: Genau dann

hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,

wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

$P(a_1, a_2),\ a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P.

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

Die Zeilensummen der Matrix $\nu(.,.)$

ergeben die Einträge $\rho_1(.)$.

Die Gesamtsumme aller $\nu(a_1, a_2)$ ist 1.

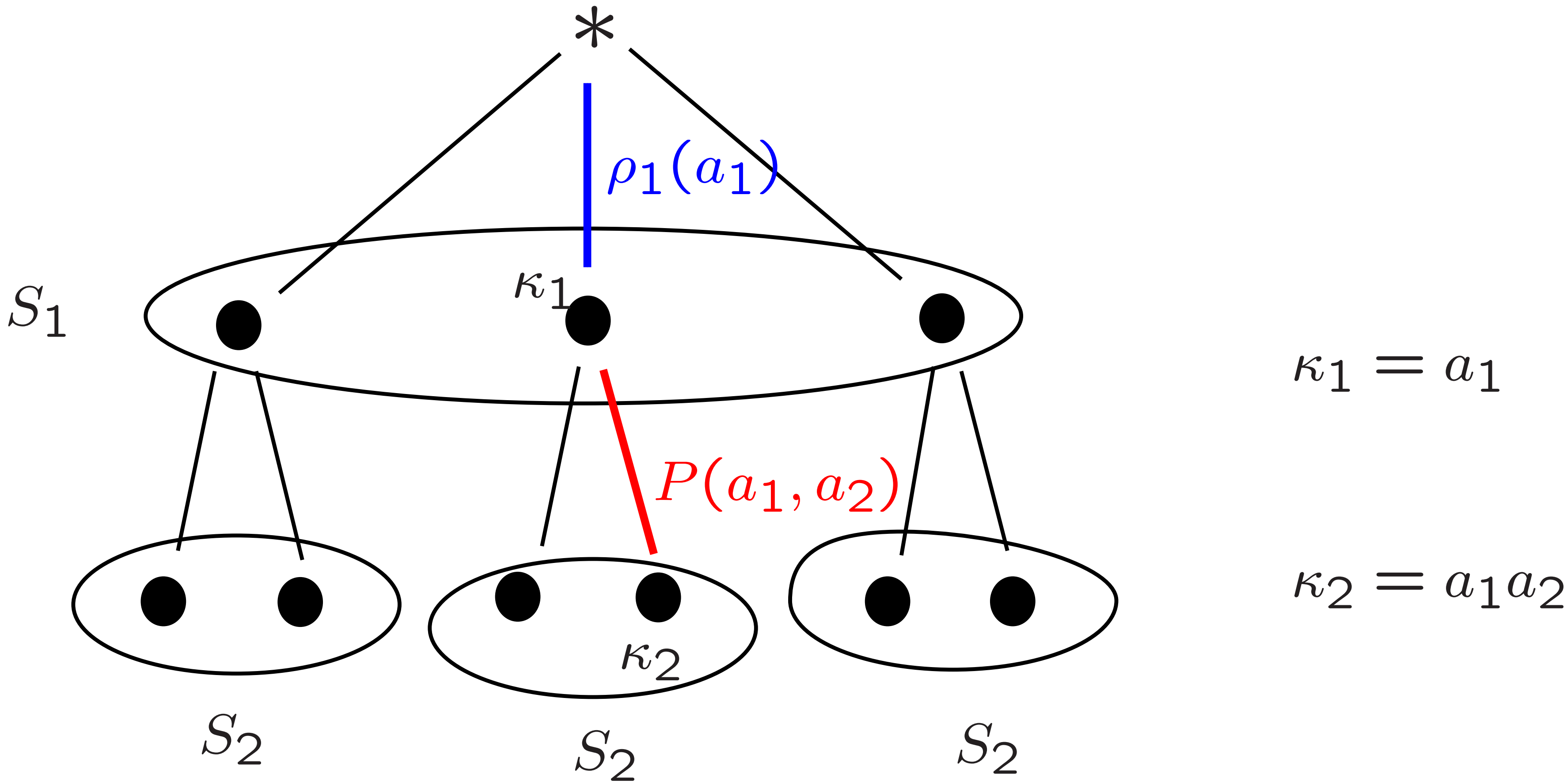
Veranschaulichung durch einen Baum

Ein zweistufiges Zufallsexperiment

kann in seiner Abfolge

durch einen *Baum der Tiefe* 2 veranschaulicht werden.

Beispiel mit $\#S_1 = 3,\ \#S_2 = 2$:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2) .$$

(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)

Zweistufige Zufallsexperimente - kontinuierlicher Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

S_1 und S_2 seien Intervalle in $\mathbb{R}$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei

$g_{a_1}(a_2)\, da_2, \; a_2 \in S_2,$ eine Dichte auf S_2.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Dichte $g_{a_1}(a_2)\, da_2$.

Schreibweise:

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2) = g_{a_1}(a_2)\, da_2$$

Die S_1-wertige Zufallsvariable X_1 habe die Dichte

$$f_1(a_1)\, da_1,\ a_1 \in S_1.$$

Dann hat (X_1, X_2) die gemeinsame Dichte

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = f_1(a_1)\, g_{a_1}(a_2)\, da_1\, da_2$$

Integriert über $A_1 \times A_2$ ergibt das:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \int_{A_1} f_1(a_1) \int_{A_2} g_{a_1}(a_2) da_2\, da_1$$

Speziell mit $A_1 = S_1$ folgt als Dichte von X_2:

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2) = \left(\int_{S_1} f_1(a_1) g_{a_1}(a_2) da_1 \right) da_2$$